Philosophische Grundpositionen zur Mathematik

W.Dörfler, Klagenfurt

Einleitung

Bei der Begründung und Legitimation von mathematischer Forschung und mathematischem Unterricht sowie der zugehörigen Didaktik spielen explizit und implizit philosophische Anschauungen vom "Wesen der Mathematik" eine Rolle. Je nachdem, ob man platonistischen oder mehr empiristischen Vorstellungen anhängt, wird die Grundkonzeption verschieden sein. In ein platonistisches Verständnis paßt sicher besser eine fertige Mathematik mit ihren Aussagen über die idealen, absoluten und unveränderlichen Ideen als Objekte der Mathematik. Der Platonist wird aus denselben Gründen von der ewigen und absoluten Wahrheit der "Mathematik" überzeugt sein, weil ihre Sätze ja wahre Aussagen über die Ideen sind und daher ihre Wahrheit unabhängig von unserem Denken und von diesem nur entdeckbar ist. Für den Empiristen ist dagegen das Gewordensein der mathematischen Begriffe, ihre Veränderbarkeit, ihre Relativität zur Erfahrungswelt und zu einem bestimmten sprachlichen Rahmen und auch die damit gegebene nur relative Gültigkeit (also nicht Wahrheit!) der mathematischen Aussagen von zentralem Interesse. Es mag durchaus sein, daß die Stoffauswahl für beide dieselbe sein wird, aber die mit den Inhalten verfolgten Ziele können diametral sein. Im einen Fall Mathematik als metaphysisch legitimierter Selbstzweck, im anderen Fall Mathematik primär als Mittel zur Beschreibung allgemeinster Gesetzmäßigkeiten in unserer Erfahrungswelt. Versteht man mathematische Begriffe als auf der Erfahrung fußend und aus ihr hervorgegangen, so wird man diesen Wesenszug der Mathematik nachzeichnen wollen, indem man den Unterricht so weit wie möglich anwendungsorientiert, problemorientiert und mathematisierend zu gestalten versucht. Wenn dies nämlich nicht dem Wesen der Mathematik entspricht, so hätte es auch als didaktische Maßnahme keinen Sinn und keine Berechtigung und daher wohl auch keine positive Auswirkung.

Vielleicht scheitert der Mathematikunterricht trotz besten Willens aller Beteiligter gerade deswegen so oft, weil er nur eine verzerrte Sicht der Mathematik bietet und am "eigentlichen Wesen" der Mathematik als humankulturelles Phänomen vorbeigeht. Nun läßt sich dieses "eigentliche Wesen" nicht so einfach aufklären und weithin steht Standpunkt gegen Standpunkt. Aber es scheint nützlich zu sein, die verschiedenen Standpunkte in ihren Grundzügen zu kennen, um den Unterricht und seine didaktischen Konzeptionen in der einen oder anderen Richtung einordnen und bewerten zu können. Aus einer solchen Kenntnis heraus ist auch die Erarbeitung eines eigenen Standpunktes erst möglich, von dem aus dann Bewertungen vorgenommen werden können. Es geht sozusagen um eine mathematische Weltanschauung, die zur Orientierung der eigenen Tätigkeit dienen kann. Ich glaube, es ist für ein gesundes Selbstverständnis des Mathematiklehrers erforderlich, zu wissen,welche Erklärungen bzw. Erklärungsversuche es gibt zur Mathematik als Gesamtphänomen, über ihr Entstehen, ihre Entwicklung, über die Bedeutung ihrer Begriffe und Aussagen, über Wahrheit und Richtigkeit mathematischer Aussagen, über ihre Anwendbarkeit auf außermathematische Sachverhalte u.ä. Ein Lehrer sollte hier keinen mystischen Vorstellungen anhängen, die man bestenfalls glauben kann, die aber nichts erklären. Durch die Kenntnis der wichtigsten philosophischen Erklärungsversuche wird keines Erachtens keineswegs die oft ohnedies nur irrationale Hochachtung von der Mathematik zerstört, sondern auf eine plausible und rationale Grundlage gestellt. Auch bieten derartige philosophische und erkenntnistheoretische Untersuchungen die Möglichkeit, die Grenzen des mittels der Mathematik "Machbaren" zu sehen, aber auch ihre Leistungsfähigkeit und potentielle Wirksamkeit abzuschätzen. So könnte die Auflösung des Glaubens an den Absolutheitscharakter (etwa hinsichtlich Exaktheit, Präzision, Formalisierung und auch Gültigkeit) Wege zur Veränderung und Entwicklung frei machen, die beim Absolutsetzen eines bestimmten Niveaus unmöglich sind (ein Beispiel dafür stellt die Entwicklung der griechischen Mathematik dar, die durch philosophische Ansichten an der Erarbeitung eines arithmetischen Konzeptes für Irrationalzahlen gehindert wurde). Dies gilt auch für den Unterricht und die von ihm betroffenen Schüler, die oft durch Fixierung auf eine bestimmte Form der Mathematik unfähig gemacht werden, anderswo Mathematisches zu erkennen.

Mit dem Hinweis auf den Schüler ist nun auch schon impliziert, daß die verschiedenen philosophischen Grundpositionen auch im Unterricht zur Diskussion gestellt werden sollten. Das kann an verschiedenen Stellen im Mathematikunterricht geschehen (zusammen mit historischen Anmerkungen) oder in Kooperation mit dem philosophischen Einführungsunterricht, für den die Beschäftigung mit einem konkreten philosophischen Problem (das noch dazu bei vielen Philosophen auftaucht) auch von Vorteil sein sollte. Auch der Sprachunterricht, sofern er sich mit Begriffen befaßt, ist zur Zusammenarbeit geeignet. Der Mathematikunterricht soll also auch zur Reflexion des eigenen Tuns führen und dieses dadurch in einem allgemeinen Sinn besser verstehbar machen. Es soll den Schülern etwa nicht als ein unbegreifliches Wunder vorkommen, daß mathematische Methoden so vielfältig anwendbar sind; dafür müßten Erklärungsmuster angeboten werden. Vielleicht getrauen sich dann auch mehr Schüler, im eigenen Leben selbst Mathematik anzuwenden, denn auf Wunder darf man doch nur hoffen.

Anknüpfungspunkte für philosophische Diskussionen bieten sich meines Erachtens besonders an folgenden Stellen: Irrationalzahlen, komplexe Zahlen, Analytische Geometrie, Differentialquotient, Wahrscheinlichkeit. Hier kann man überall die Frage stellen: Was tun wir hier eigentlich und welch tieferen Sinn haben die verwendeten sprachlichen Symbole? Woher nehmen wir diese Ideen und Begriffe und wieso erweisen sie sich als so nützlich? Es scheint besser zu sein, solche Fragen bei ganz <u>neuartigen Stoffen</u> aufzuwerfen, weil der Schüler dann die Notwendigkeit einer solchen Betrachtung einsieht. Eine Problematisierung der so wohlvertrauten natürlichen Zahlen etwa kann erst dann erfolgen, wenn anderswo schon ein Problembewußtsein geweckt wurde.

Die folgenden Ausführungen können nur einen verkürzten Einblick in die philosophischen Problemstellungen geben und mögen zusammen mit der angegebenen Literatur als Anregung für wietere Beschäftigung und einen Einbau in den Unterricht dienen.

1. Gegenstand der Mathematik und seine Genese

Es ist wohl allgemein anerkannt, daß die Gegenstände der Mathematik nicht unmittelbar in unserer sinnlichen Erfahrung vorliegen. Die Mathematik beschäftigt sich mit <u>Begriffen</u>, die durch Definitionen oder Erklärungen in ihrer Bedeutung so präzise wie möglich festgelegt werden. Begriffe gibt es natürlich nicht nur in der Mathematik, sondern in allen sprachlich erfaßbaren Bereichen. Die <u>Begriffe der Mathematik</u> sind u.a. jedoch dadurch ausgezeichnet, daß ihr Inhalt, ihre Bedeutung (ihre Extension und Intension) genau bekannt und festgelegt sind. Dies ist erforderlich, weil <u>logische Beziehungen</u> ("Sätze") zwischen den Begriffen gesucht und begründet werden sollen, was bei nur vage umrissenen Begriffen nicht möglich ist, jedenfalls nicht in objektiver und eindeutiger Weise. Diese Begriffe waren aber nicht immer schon da, sondern haben sich erst im Laufe der Zeit entwickelt und diese Entwicklung und die Entstehung neuer Begriffe hält heute in progressiver Weise an. Was läßt sich nun quasi von außen an diesem Prozeß beobachten, empirisch und historisch feststellen?

Ich möchte am Beispiel der natürlichen Zahlen zunächst klarmachen, daß mathematische Begriffe in einem gewissen Sinn allgemeinste Eigenschaften repräsentieren, wobei diese Eigenschaften sowohl materialen Objekten wie auch Objekten unseres Denkens zukommen können oder nicht. Außerdem geht es nicht nur um Eigenschaften einzelner Objekte, sondern meistens um Eigenschaften mehrerer Objekte, die als neue Gesamtheit aufgefaßt werden, sowie um Eigenschaften von Beziehungen zwischen Objekten. Die Allgemeinheit dieser Eigenschaften ist zunächst dadurch charakterisiert, daß von allen anderen außer der gerade betrachteten Eigenschaft abgesehen wird (etwa von physikalischen, chemischen, biologischen Eigenschaften). Damit werden dann diese mathematischen Begriffe und die über sie aufgestellten Sätze auch so universell verwendbar, weil sie überall dort anwendbar sind, wo die entsprechende allgemeine Eigenschaft vorliegt, ungeachtet anderer Eigenschaften. Ferner handelt es sich nicht um beliebige allgemeinste Eigenschaften, sondern einerseits um quantitative Eigenschaften und Beziehungen (Zählen, Messen; ausgedrückt durch Zahlen) und andererseits um räumlich-geometrische Eigenschaften und Beziehungen. Beide Formen von Eigenschaften können in ihrem Ursprung auf quantitative und geometrische Beschreibungen unserer Erfahrenswelt zurückgeführt werden und bilden den Ausgangspunkt für einen hochkomplexen Prozeß, in dem sich immer neue, allgemeinere und abstraktere Eigenschaften herausgebildet haben, die heute als Begriffe den Gegenstand mathematischer Untersuchungen bilden. Aber zurück zu den natürlichen Zahlen!

Die historische Entwicklung und linguistische Untersuchungen zeigen, daß die Zahlen nicht immer diesen selbständigen Objektcharakter hatten, wie das der heutige Sprachgebrauch andeutet. Wir sagen ja: die Eins, die Zwei, d.h. wir verwenden Substantive zur Bezeichnung der Zahlen. In manchen Sprachen auf einem früheren Entwicklungsniveau sind jedoch Zahlwörter reine Eigenschaftswörter ohne substantivische Form, was bedeutet, daß es die einzelnen Zahlen als Begriffe (und damit die Zahlen selbst) nicht gibt! Noch deutlicher wird dies, wenn man weiß, daß in manchen Sprachen auch für verschiedene Dingmengen verschiedene Zahlwörter verwendet werden. Restbestände dieses rein adjektivischen und vorbegrifflichen Zahlverständnisses in modernen Sprachen ist die Deklinierbarkeit (in Fall und Geschlecht) zumindest kleiner Zahlwörter. Im Deutschen trifft dies nur auf "Eins" zu, aber etwa im Russischen werden die Zahlwörter bis einschließlich "Vier" (zumindest teilweise) dekliniert. Erst durch Ausweitung der Verwendung von Zahlwörtern auf immer mehr und verschiedene Dingmengen lösten sich die Zahlwörter von den Dingmengen und konstituierten sich im Sprachgebrauch als universell verwendbare Eigenschaftswörter für Dingmengen. Die Zahlwörter beschreiben dabei die Eigenschaft einer Dingmenge, aus einer bestimmten Anzahl von Dingen zu bestehen. Erst ein weiterer Entwicklungsprozeß, der sicher mit einem theoretischen Interesse an diesen Eigenschaften "zwei", "drei" als Gegenstand unseres Denkens verbunden war, führte zur Herausbildung der Begriffe der Zahlen 2,3 usf. Dies widerspiegelt sich in der Sprache in der Substantivierung der Zahlwörter. Dadurch erhalten die Zahlen erst Objektcharakter. Diese "Objektivierung" oder "Vergegenständlichung" im sprachlichen Gebrauch ist durchaus sinnvoll, weil dadurch die Untersuchung der Begriffe und ihrer Beziehungen wesentlich einfacher gestaltet wird. Wir wollen festhalten: natürliche Zahlen beschreiben je eine sehr allgemeine Eigenschaft von Dingmengen, die von allen anderen Eigenschaften dieser Dinge absieht. Es ist übrigens interessant, daß die (innermathematische) Definition der natürlichen Zahlen in einem mengentheoretischen Aufbau genau diesen Entwicklungsprozeß widerspiegelt.

Durch die Auffassung der Zahlen als Begriffe und damit als Objekte unseres Denkens, wird es nun möglich, Eigenschaften dieser Begriffe und Beziehungen zwischen ihnen zu definieren und zu untersuchen. Dazu gehören etwa: Teilbarkeit, Primzahlen, gerade Zahlen, ungerade Zahlen usf. Wir untersuchen also in Anbetracht des vorhin Gesagten Eigenschaften von Eigenschaften und dieser Stufenprozeß läßt sich ad infinitum fortsetzen, und zwar in verschiedener Weise. So kann man etwa nun den Begriff "natürliche Zahl" bilden, der durch das allen Zahlen 1,2,3,... Gemeinsame festgelegt ist. Auch rationale Zahlen kann man derart als Eigenschaften, nämlich von Paaren natürlicher Zahlen (Verhältnis, Bruchteile) auffassen. Es ist nicht schwierig, diesen Prozeß der Abstraktion weiterzuverfolgen und einzusehen, wie schritt- und stufenweise das komplexe Begriffsnetz entsteht, das nun so vertraut ist. Also nochmals: wir haben es in der Mathematik mit (allgemeinen, abstrakten und präzise festgelegten) Eigenschaften, Eigenschaften von Eigenschaften, Eigenschaften von Eigenschaften von Eigenschaften, ... zu tun, die wir in Begriffe formen und ihnen dabei oft in der sprachlichen Ausdrucksweise den Charakter von "Objekten" zuweisen (Die Gruppe, die Primzahl, ...).

Ist man in genügend großer Höhe bei diesem Prozeß angelangt, so ist der beschriebene Charakter der mathematischen Begriffe als allgemeinste Eigenschaften nur mehr schwer unmittelbar zu erkennen, was vor allem durch die Objektivierung und Substantivierung verursacht wird (welche sicher unumgänglich sind, weil sonst die Ausdrucksweise viel zu kompliziert würde; außerdem wird vieles, worüber man redet und denkt, automatisch sprachlich zum Objekt).

Wir haben festgestellt, daß nachweisbar die Zahlen als Begriffe, und zwar als Verkörperung allgemeinster quantitativer Eigenschaften, durch Abstraktion aus der Erfahrung gewonnen wurden, jedenfalls stellt sich der äußerlich-historische Prozeß der Begriffsentwicklung derart dar. Abstraktion bedeutet dabei Absehen von (hierzu) unwichtigen Eigenschaften, Herausschälen des Relevanten, Charakteristischen, Allgemeinen, allen konkreten Ausprägungen Gemeinsamen. Nun kann man mit Abstraktion allein nicht das Entstehen aller mathematischen Begriffe beschreiben. Ein zumindest ebenso wichtiger Prozeß ist der der Idealisierung. Dabei konstruiert der Mensch in seinem Denken Eigenschaften, die in seiner Erfahrung nur approximativ beobachtbar sind, die aber zur Ordnung und Beschreibung dieser Erfahrung aufgrund ihrer Einfachheit viel besser geeignet sind. Der Mensch projiziert gleichsam seine Idealvorstellungen in die Erfahrung hinein,und diese verhält sich innerhalb gewisser Grenzen auch entsprechend diesen idealisierten Vorstellungen. Begriffe, die so entstanden sind, sind äußerst zahlreich: Punkt, Gerade, Ebene, Kreis, Kurve, Fläche (also weithin die geometrischen Grundbegriffe), aber wohl auch Momentangeschwindigkeit und damit Ableitung. Man überlege sich, wie es vorstellbar wäre, daß diese Begriffe (die ja ganz bestimmte vorstellungsmäßig festgelegte Eigenschaften umfassen!) aus der Erfahrung durch Abstraktion im obigen Sinne entstanden sein könnten! Dies ist unmöglich, weil die korrespondierenden Eigenschaften (gerade, eben, usf.) in der (sinnlichen) Erfahrung prinzipiell nicht realisierbar sind und daher nur in unserem

Denken gebildet werden. Es sei noch erwähnt, daß in der Entwicklung der Mathematik diese ursprünglich nur intuitiv erklärten Begriffe durch Zurückführung auf andere Begriffe präzisiert wurden (Analytische Geometrie).

Wenn wir nun das Wesentliche zusammenfassen, so läßt sich folgendes festhalten: In den mathematischen Begriffen verkörpern sich, vergegenständlichen sich allgemeine (generelle, universale) quantitative und räumliche Eigenschaften und Beziehungen, welche letztere wir auch als zwischen (sinnlichen und begrifflichen) Objekten bzw. an mehreren Objekten in bestimmter Weise angelagerte Eigenschaften auffassen können. Diese in unserem Denken festgelegten Eigenschaften (Begriffe, begriffliche Objekte) treten in ihrer Mehrzahl in der materialen und geistigen Erfahrungswelt jedoch nicht unmittelbar auf und können dort auch nicht unmittelbar vorgefunden werden, sondern sie entstehen in Denkprozessen, die man als Abstraktion und Idealisierung bezeichnet. Die so erhaltenen und durch das Denken festgelegten Eigenschaften werden dann in meist substantivierter Form Gegenstand logisch-mathematischer Untersuchungen und geben damit auch Anlaß zur 'Konstruktion' neuer Eigenschaften, die immer allgemeiner und umfassender sind.

2. Philosophische Erklärungsversuche

Mit den Feststellungen aus Abschnitt 1 wird nun allerdings nur eine an der Oberfläche bleibende Phänomenologie der Genese und Entwicklung mathematischer Begriffe gegeben, die sich weithin durch Analyse und historische und linguistische Untersuchungen stützen läßt, wenn sie vielleicht auch manches nur partiell aufklärt (aber welche Theorie erklärt schon alles?). Eines sollte jedoch klar geworden sein, nämlich, daß der Objektcharakter mathematischer Begriffe im wesentlichen ein sprachliches Phänomen ist, das denkökonomische und pragmatische Gründe hat. Dessen ungeachtet bleibt als philosophisch-erkenntnistheoretisches Problem die Frage, woher der Mensch denn nun diese Eigenschaften nimmt, wie er sie wahrnimmt und welche Art von Realität und Existenz ihnen zukommt. Genau an dieser Frage - und nicht an der äußeren und rational-empirisch untersuchbaren und aufklärbaren Phänomenologie scheiden sich nun die philosophischen Geister. Die meisten angebotenen Erklärungsmodelle stehen irgendwo auf einer Linie zwischen zwei Extrempositionen. Die Auseinandersetzung zwischen diesen ist in der Philosophie auch als Universalienstreit über Jahrhunderte hinweg bekannt. Die Gegenüberstellung läßt sich bereits mit Plato - Aristoteles beginnen und bis herauf in moderne Grundlagenforschungen verfolgen. Wir wollen die beiden Extrempositionen als Platonismus - Idealismus und als Materialismus bezeichnen und im Folgenden kurz beschreiben, wobei einige Vereinfachungen unumgänglich sind.

Im (extremen) Platonismus vertritt man die Ansicht, daß allgemeine Eigenschaften, also auch die mathematischen Begriffe, als Verkörperungen allgemeinster quantitativer und räumlicher Eigenschaften eine objektive, vom Menschen und seiner Erkenntnis, seinem Denken und auch von der materiellen Welt unabhängige Existenz besitzen. Plato bezeichnet diese allgemeinen Eigenschaften als "Ideen". Diese Ideen kommen nun in den Dingen in mehr oder weniger verzerrter Form zum Ausdruck, die Ideen wirken durch die Dinge und geben diesen ihr Erscheinungsbild. Die Erkenntnis des Menschen gehe nach Plato nun so vor sich, daß er in der Lage ist, diese universellen Ideen zu erkennen und zu entdecken. In einem (naiven) platonischen Verständnis gäbe es also unabhängig vom menschlichen Denken und den materiellen Dingen die Idee der Zahl "3" in einer objektiven und absoluten Existenz, und ebenso gilt dies für "natürliche Zahl", "Kreis", "Ebene", aber auch "Euklidische Geometrie", "Vektorraum", "Hilbertraum". In diesem Sinne sind die Begriffe kein Produkt eines menschlichen, konstruktiven Denkprozesses, sondern etwas in den Ideen objektiv und unveränderlich Vorgegebenes, das der Mensch in einer analogen Weise erforscht, wie er die materielle Welt erforscht (in der er ja auch die Widerspiegelungen der Ideen vorfindet).

Die Frage, wie ein solches Erkennen möglich ist, wird damit geklärt, daß der Mensch in seiner Präexistenz vor seinem irdischen Dasein diese Ideen (Eigenschaften in reiner Form) geschaut hat, und der Lernprozeß ein Sichwiedererinnern ist. Durch eine solche Philosophie wird die Mathematik zu einer metaphysisch begründeten Wissenschaft mit einem quasi überirdischen Auftrag, diese absoluten Wesenheiten der Ideen zu erforschen. Ferner ergibt sich eine Zweckfreiheit, historische Invarianz und absolute Unabhängigkeit von der Gesellschaft, in der Mathematik betrieben wird. Auf einer solchen philosophischen Basis läßt sich reine Mathematik ohne Anwendungen leicht rechtfertigen und gleichsam als Auftrag an die Menschheit legitimieren. Wie steht es nun mit einer Erklärung für die Anwendbarkeit der Mathematik? Nun, auch diese ist so möglich, denn die Ideen wirken ja in den Dingen, so daß die vom Menschen erforschten und beschriebenen Ideen in direkter Beziehung zur Erfahrung stehen, weil ja auch dort die Ideen in zwar unreiner Form, aber doch erscheinen. Es genügt also, die Ideen zu erforschen, ihre Anwendbarkeit ist in diesem Sinne gesichert, wenn sie auch nicht sofort erkannt wird.

Man kann diese Position im Bezug zum Universalienstreit auch so beschreiben, daß die Universalien (die Ideen, die allgemeinen Eigenschaften) eine objektive Existenz besitzen und die einzelnen Dinge nur Träger der Universalien sind und die Dinge nur durch diese zu dem werden, was sie sind. In dieser extremen Form ist der Platonismus reine Metaphysik und durch rationale Überlegungen kaum zu stützen (allerdings auch nicht stringent widerlegbar). Für mich würden allerdings die aufgezeigten historischen und sprachlichen Entwicklungen eher gegen die rein platonistische Philosophie sprechen. Gerade die Entwicklung und Veränderung in den Begriffen, ihre offensichtlich in vielen Fällen aus einer bestimmten Zwecksetzung heraus erfolgte Fassung weisen nicht auf eine a-priori gegebene, von der Erfahrung unabhängige und absolute Existenz hin. Außerdem bleibt die Zugänglichkeit dieser Ideenwelt für den Menschen trotz allem unklar und rational nicht aufklärbar.

Das andere Ende der Skala nimmt, wie gesagt, die materialistische Philosophie ein. Hier gibt es außer der Materie und ihren Erscheinungsformen keinerlei Existenz und die von uns geformten mathematischen Begriffe gehen letztenendes auf Eigenschaften und Beziehungen räumlicher und zeitlicher Art der materiellen Dinge zurück. Die mathematischen Begriffe sind hier nur Widerspiegelung von allgemeinen quantitativen und raum-zeitlichen Verhältnissen in unserer Welt, die der Mensch aus dieser Welt entnimmt. Hier gibt es keine metaphysische Komponente, es stellt sich höchstens das psychologische Problem der Wahrnehmung und der daran anschließenden Verarbeitung in unserem Denken, wo ja diese allgemeinen Eigenschaften und Verhältnisse erkannt werden. In seiner trivialen und rein empiristischen Form läßt sich der Materialismus in Anbetracht der Entwicklung der modernen Mathematik mit ihrer an vielen Stellen evidenten Unabhängigkeit von empiristischer Erfahrung nicht aufrechterhalten und wird auch so nicht vertreten. Man baut ganz bewußt den schon besprochenen Prozeß der Abstraktion und Idealisierung ein, in dem Sinne, daß der Mensch schrittweise aus bereits vorliegenden Eigenschaften (Begriffen) immer neue ableitet. Durch das Aufrechterhalten der ursprünglichen Wurzel in der empirischen Erfahrung kann dabei die Aussage aufrechterhalten bleiben, daß auch die so erhaltenen Begriffe Beschreibungen von "Quantitätsverhältnissen und räumlichen Verhältnissen" der materiellen Welt und ihrer Erscheinungsformen darstellen. Dabei ist es aber wichtig, daß die mathematischen Begriffe etwas <u>Allgemeines</u> widerspiegeln, allgemeine Gesetzmäßigkeiten formulieren und dies in umso stärkerem Ausmaß, je abstrakter und damit für den oberflächlichen Beobachter ferner den realen Erscheinungen sie sind. Hier wird sogar der Standpunkt vertreten, daß durch die ganz allgemeinen Begriffe und Aussagen immer tiefer in die Gesetzmäßigkeiten der Materie und ihrer Erscheinungsformen eingedrungen wird.

In einer solchen Philosophie der Mathematik erklärt sich das Phänomen der Anwendbarkeit der Mathematik ebenfalls quasi von selbst. Denn die Aussagen der Mathematik waren ja schon immer Aussagen über Quantitäts- und Raumverhältnisse allgemeiner und allgemeinster Natur und können daher,unmittelbar auf unsere Erfahrung angewandt, zu ihrer Deutung und Erklärung sowie zur Prognose von Erscheinungen verwendet werden. Waren in der platonistischen Philosophie die mathematischen Begriffe Beschreibungen der Ideen und mathematische Aussagen Aussagen über diese Ideen, so sind hier die Begriffe Beschreibungen von allgemeinen beobachtbaren, quantitativen und räumlichen Phänomenen an der Materie und die Aussagen eben Aussagen über diese allgemeinen Eigenschaften dieser Materie. Die <u>Universalien</u> existieren hier an den Dingen als ihren Trägern und haben außerhalb von diesen keine metaphysische oder transzendente Existenz. Das Allgemeine, Universale liegt in den Dingen selbst und ist <u>Erscheinungsform der Materie</u>, der Mensch hat die Fähigkeit, dies Allgemeine und seine Gesetzmäßigkeit zu erkennen und in seiner Sprache zu beschreiben. In der materialistischen Philosophie ist also die Materie Träger der in der Mathematik untersuchten allgemeinsten Eigenschaften,und diese existieren nur in der Materie. Die Mathematik untersucht allerdings genau genommen in diesem Verständnis nur "Widerspiegelungen" der Quantitätsverhältnisse und räumlichen Verhältnisse im menschlichen Denken. Damit wird die nur approximative Erfassung der Realität durch unser Denken erklärt, weil eben bei einer Widerspiegelung auch Verzerrungen auftreten können.

Interessant ist in einer solchen Philosophie noch das <u>Verhältnis von Mathematik zu den Naturwissenschaften,</u> da doch letztere ebenfalls allgemeine Gesetzmäßigkeiten der Materie untersuchen. Dieses Verhältnis wird dadurch charakterisiert, daß die Mathematik weit <u>allgemeinere</u> Eigenschaften untersucht, indem sie von jeglichen Eigenschaften absieht, die sonst eben gerade Gegenstand der Naturwissenschaften sind (wie physikalische, chemische, biologische, u.a.) Es werden - wie schon angemerkt - nur Quantitätsverhältnisse und räumliche Verhältnisse zum Gegenstand mathematischer Begriffe und Aussagen. Dies ist gleichsam eine Standardformel der materialistischen Philosophie der Mathematik. Um Aussagen der Physik zu erhalten, müssen die physikalischen Eigenschaften mit in die Betrachtung einbezogen werden, wodurch Aussagen geringeren Allgemeinheitsgrades erhalten werden.

Nun kann zwar mit der materialistischen Sichtweise ein guter Teil des Phänomens Mathematik erklärt werden, aber man stößt doch immer wieder auf Schwierigkeiten, wenn man Begriffe der Mathematik bloß als "Widerspiegelungen" im materialistischen Sinne auffassen will. Dies tritt ja auch in den Naturwissenschaften auf, wo sogenannte <u>theoretische Begriffe</u> (wie Kraft, Energie, u.ä,) eingeführt werden, von denen nicht alle aus der Empirie über das Experiment Bedeutung haben, sondern denen eine Bedeutung nur innerhalb einer physikalischen Theorie zukommt. Innerhalb der Mathematik gehören dazu wohl der Begriff des "<u>Unendlichen</u>" als aktual Unendliches und all das, was Hilbert als "<u>ideale Elemente</u>" bezeichnet hat (unendlich ferne Punkte und Geraden in der Projektiven Geometrie, der Punkt ∞ in der Kompaktifizierung der komplexen Ebene u.ä.). Mit anderen Worten: in unserem Denken schaffen wir uns Begriffe (Eigenschaften), mit denen wir die erfahrbaren Erscheinungen "ordnen" und so "verstehen", "erklären", womit noch nicht impliziert ist, daß diesen Begriffen in irgendeiner Weise von unserem Denken unabhängige Objekte und Beziehungen zwischen diesen entsprechen. Auch erhalten diese Begriffe erst durch unser Denken ihre Bedeutung, und auf dieser basieren dann auch im wesentlichen die logischen Operationen mit den Begriffen. Wir schreiben diese Eigenschaften und Verhältnisse den Erscheinungen gleichsam zu, weil wir keine anderen "Erklärungen" verfügbar haben. Für mich sind etwa Momentangeschwindigkeit, Dichte, Stromstärke u.ä. derartige Begriffe. Auf den von dem jeweiligen Gegenstandsbereich unabhängigen Kern reduziert, ergibt sich der mathematische Begriff der Ableitung aus ihnen, der dann in allen ähnlichen Situationen zu entsprechenden Begriffsbildungen angewendet werden kann (als lokale Änderungsrate). Hier und bei vielen anderen Begriffsbildungen hat es doch eher den Anschein, daß die Begriffe ausschließlich dem menschlichen Denken entstammen, das sich mit ihrer Hilfe ein "Bild" von der "Welt" macht. Was also bei einer einseitig materialistischen Philosophie zu kurz kommt, ist die kreative, phantasievolle (aber grundsätzlich zweckgerichtete) Denkleistung des Menschen mit seiner Fähigkeit, sich in der Sprache ein Begriffssystem zu schaffen, mit dem er an die erfahrbare Welt herantritt und sie mit diesem System zu "erklären" versucht. Nimmt man in extremer Weise diesen Standpunkt ein, so kommt man zum Nominalismus oder abgeschwächt zum Konzeptualismus, in dem die Existenz von Universalien in jeglicher Form außerhalb des menschlichen Denkens geleugnet wird. Die Universalien sind eben bloß Namen oder Begriffe, die wir in die Erfahrung hinein projizieren. Der Mensch selbst legt die Bedeutung der Universalien fest und entnimmt sie nicht einer Schau von Ideen oder der Beobachtung der Erscheinungsformen der Materie. Die Existenz der Universalien und damit auch der mathematischen Begriffe (Eigenschaften, "Objekte") ist also keine vor aller Erfahrung gegebene und von den materiellen Dingen unabhängige, wie im Platonismus, und auch keine durch die Dinge selbst als deren allgemeinste Eigenschaften erzeugte, sondern die Universalien existieren in unserem Denken, und existieren nur insoweit, als wir sie denken. Dieses Denken ist dabei durch Grundregeln, wie sie die Logik formuliert hat, eingeschränkt, aber dies auch nur deswegen, weil diese Regeln sich als zweckmäßig erweisen und Widersprüche, Paradoxien und Antinomien verhindern. Allerdings wird, wie die Geschichte zeigt, der logische Regelapparat bei neuartigen Begriffsbildungen zu erweitern sein, um die Konsistenz unseres Denkens zu bewahren (Antinomien der Mengenlehre!).

Wenn wir den metaphysischen Platonismus ausschließen, so lassen sich die Positionen des <u>Materialismus</u> und <u>Konzeptualismus</u> relativ leicht in einer Synthese vereinen. Wir knüpfen dazu an unsere ganz zu Anfang gemachten Bemerkungen an, wo wir gesehen haben, wie sich Eigenschaften, die wir an Dingen beobachten oder feststellen, verselbständigen, objektivieren. Ich würde meinen, daß das von uns mit Begriffen erfaßte Allgemeine in unserem Denken existiert und an den einzelnen Dingen als deren beobachtbare Eigenschaften und Beziehungen auftritt. Das Allgemeine ist somit allgemein, weil es an vielen Dingen in gleicher Weise auftritt und so von uns Menschen erst als Allgemeines konzeptualisiert werden kann. Mit dieser Sichtweise und unter Heranziehung des kreativen selbständigen Prozesses der stufenweisen Abstraktion und Idealisierung als innermathematische Methode zur Begriffsbildung können wir durchaus die mathematischen Begriffe in vernünftiger Weise erfassen und in ihrer Existenzqualität einordnen. Der von mir bevorzugte Standpunkt wäre also der

einer Synthese aus Materialismus und Konzeptualismus unter starker Betonung der von empirischer Erfahrung unabhängigen Fähigkeit des Menschen zur Bildung von Begriffen (d.h. zur Beschreibung von abstrakten, allgemeinen Eigenschaften) und zu deren Untersuchung hinsichtlich gegenseitiger Abhängigkeit mit logischen Mitteln.
Die Anwendbarkeit der so geschaffenen Begriffsnetze beruht meines Erachtens auf zwei Wesenszügen: Einerseits gehen viele Begriffe tatsächlich durch Abstraktion und Idealisierung aus der Erfahrung hervor und beinhalten somit Teile (allgemeine Muster) davon. Andererseits - und das ist vielleicht das tatsächlich Entscheidende - bemüht sich die Mathematik immer um größtmögliche Allgemeinheit, indem sie von allen für den jeweiligen Gegenstand unwichtigen Eigenschaften absieht. Es ist klar, daß derartige Allgemeinheit "Anwendbarkeit" impliziert, weil gleichsam mit den mathematischen Theorien alle überhaupt nur möglichen quantitativen und räumlichen Eigenschaften und deren logische Abhängigkeiten untersucht werden. Diese Allgemeinheit erst ermöglicht Übertragbarkeit, Transfer, die Loslösung vom konkreten Fall, vom konkreten Objekt und Prognose von Erscheinungen. Damit erklärt sich auch der "Erfolg" der modernen Mathematik: die Allgemeinheit und Abstraktheit ihrer Aussagen macht ihre Anwendung in so verschiedenen Gebieten wie Physik, Biologie, Soziologie oder Psychologie möglich. Eine Mathematik einzelner geometrischer oder algebraischer Objekte etwa hätte dies nie leisten können. Allerdings sollte vermerkt werden, daß eine Art "Anwendbarkeitsbedarf" immer auch einen Druck ausübt, so daß geeignete Verallgemeinerungen aufgestellt werden. Grundsätzlich besteht aber unter Einhaltung der schon erwähnten logischen "Verfahrensvorschriften" (wie vor allem Widerspruchsfreiheit) keine Grenze bei der Konstruktion immer neuer Eigenschaften und Begriffe. Über den Sinn und Zweck solcher Konstruktionen und deren Untersuchung läßt sich dann allerdings wieder diskutieren.

Literatur:

O.Becker, Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung; Suhrkamp 1964

P.Bender / A.Schreiber, Operative Genese der Geometrie, Monographie, (in Vorbereitung)

E.W. Beth, Foundations of Mathematics, Harper and Row, New York 1966

C.Castonguay, Meaning and Existence in Mathematics, Springer Verlag, Wien - New York 1972

H.Gericke, Geschichte des Zahlbegriffes, B.I. Mannheim 1970

V. Kraft, Mathematik, Logik und Erfahrung, Springer Verlag, Wien 1970

* K. Menninger, Zahlwort und Ziffer, I, II, Vanderhoek und Ruprecht, Göttingen 1958

H. Meschkowski, Richtigkeit und Wahrheit in der Mathematik, B.I. Mannheim 1978

* W.N.Molodschi, Studien zu philosophischen Problemen der Mathematik, DVW, Berlin 1977

* R.Ruben, Philosophie und Mathematik, Teubner, Leipzig 1979

* G.I.Ruzavin, Die Natur der mathematischen Erkenntnis, Akademie-Verlag, Berlin 1977

I. Ruzsa, Die Begriffswelt der Mathematik, Volk und Wissen, Berlin 197

H. Weyl, Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft, München 192

* Für eine erste Einführung besonders geeignet.

Prof. Dr. Willibald Dörfler,
Universität für Bildungswissenschaften,
9010 Klagenfurt